SF1624 Algebra och geometri

Tjugotredje föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

7 december, 2009

Kvadratiska former

Definition

En *kvadratisk form* är en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ på formen

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i \leq j} a_{i,j} x_i x_j$$

där $a_{i,j}$ är reella tal för $1 \leq i \leq j \leq n$.

Exempel

- $Q(x, y) = x^2 + xy + y^2$
- $Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 4xz$

Kvadratiska former med symmetriska matriser

Eftersom $x_i x_j = x_j x_i$ kan vi dela upp termerna $x_i x_j$ som $\frac{1}{2}x_i x_j + \frac{1}{2}x_j x_i$. Vi kan då skriva

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

där $a_{i,j} = a_{j,i}$.
Vi kan alltså skriva

$$Q(\overline{x}) = \overline{x}^t A \overline{x}$$

där $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ och A är en symmetrisk matris.

Exempel

- $Q(x, y) = x^2 + xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

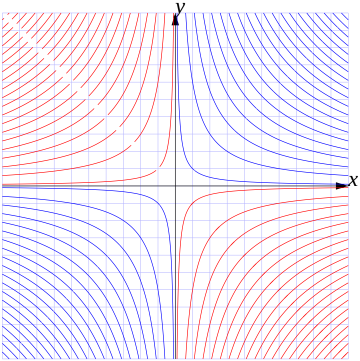
Nivåkurvor

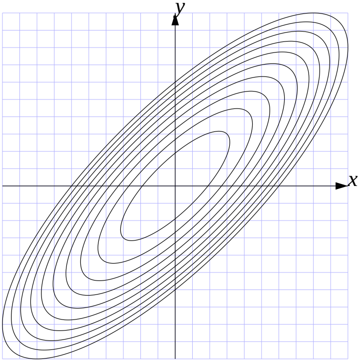
Vi kan åskådliggöra en kvadratisk form i två variabler genom nivåkurvor, dvs kurvorna

$$Q(x, y) = k$$

för olika konstanter k.

Exempel





Diagonalisering

Eftersom vi kan diagonalisera en symmetrisk matris med hjälp av ett ortogonormalt basbyte får vi

Sats

En kvadratisk form Q kan skrivas

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2$$

för reella konstanter $a_1, a_2, \dots, a_n$ efter ett ortonormalt basbyte.

Exempel

- $Q(x, y) = xy = \frac{1}{2}(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}})^2 - \frac{1}{2}(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}})^2$
- $Q(x, y) = x^2 + xy + y^2 = \frac{3}{2}(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}})^2$

Ortogonal diagonalisering

Om vi skriver den kvadratiska formen Q med en symmetrisk matris A får vi

$$Q(P\overline{x}) = \overline{x}^t P^t A P \overline{x} = \overline{x}^t D \overline{x}$$

där P är en ortogonala matris som gör att $P^t AP$ blir en diagonalmatris D.

Definita och semidefinita former

Sats

Om Q är en kvadratisk form med egenvärden $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ uppfyller

$$a_1|\overline{x}| \leq Q(\overline{x}) \leq a_n|\overline{x}|$$

för alla $\overline{x}$ i $\mathbb{R}^n$.

Definition

- Om $Q(\overline{x}) > 0$ för alla $\overline{x} \neq 0$ kallas Q *positivt definit*
- Om $Q(\overline{x}) \geq 0$ för alla $\overline{x} \neq 0$ men inte positivt definit kallas Q *positivt semidefinit*
- Om $Q(\overline{x}) < 0$ för alla $\overline{x} \neq 0$ kallas Q *negativt definit*
- Om $Q(\overline{x}) \leq 0$ för alla $\overline{x} \neq 0$ men inte negativt definit kallas Q *negativt semidefinit*